**Лекція 5**

**Метод рекурентних співвідношень.**

**Розв’язування лінійних рекурентних співвідношень *k*-го порядку**

****

**Леонардо Пізанський**

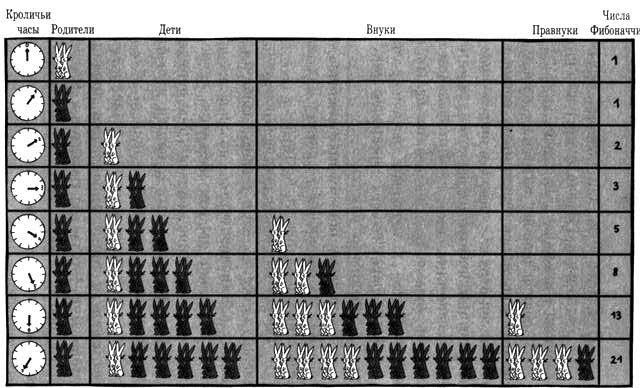
1170-1250

**ЗАДАЧА ПРО КРОЛИКІВ І ПОСЛІДОВНІСТЬ  ФІБОНАЧЧІ**

  Італійський математик Леонардо Пізанський, більш відомий як Фібоначчі (тобто син Боначчі), - один з основоположників математики нового часу в  Західній Європі.   Його «Книга про абак»  пропонує таку задачу:

*Дехто помістив пару кроликів у деяке місце, загороджене з усіх боків стіною, щоб дізнатися, скільки пар кроликів  народиться   протягом року, якщо природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує другу пару, а   народжують кролики починаючи з другого місяця після своєї появи на світ.*

Розв'язання цієї задачі можна наочно продемонструвати за допомогою рисунка.

[](http://3.bp.blogspot.com/-M3RzRYh4wBY/VOTQ_23R_oI/AAAAAAAAAAs/FqWK00BbN-g/s1600/%D0%BA%D1%80%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B8.jpg)

Метод рекурентних співвідношень полягає в тому, що розв’язання комбінаторної задачі з *n* предметами виражається через розв’язання аналогічної задачі з меншим числом предметів за допомогою деякого співвідношення, яке називається рекурентним. Користуючись цим співвідношенням, шукану величину можна обчислити, виходячи з того, що для невеликої кількості предметів (одного, двох) розв’язок задачі легко знаходиться. Для задачі Фібоначчі маємо таке рекурентне співвідношення:

*f(n +1) = f(n) + f (n -1)*

*Рекурентне співвідношення називається порядку k*, якщо воно дозволяє виразити *f*(*n* + *k*) через *f*(*n*), *f*(*n* + 1), …, *f*(*n* + *k* − 1).

Послідовність *аn = f*(*n*)(1)називається *розв’язком рекурентного співвідношення,* якщо підстановка послідовних членів(1)урекурент­не співвідношення перетворює його у тотожність.

*Розв’язок рекурентного співвідношення k-го порядку* *називається загальним,* якщо він залежить від *k* довільних сталих *С*1*, С*2*, ..., Сk* і шляхом підбору цих сталих можна отримати будь-який розв’язок даного співвідношення.

Розв’язати рекурентне співвідношення означає знайти його *загальний розв’язок*.

Загальних правил розв’язування рекурентних співвідношень не існує. Проте існує клас рекурентних співвідношень, який розв’язується єдиним методом. Це лінійні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами.

***Лінійне рекурентне співвідношенням друго­го порядку:***

*f*(*n +* 2) *= a*1*f*(*n +* 1) *+ a*2*f*(*n*)*.*

Щоб розв’язати лінійне рекурентне співвідношенням другого порядкускладють характеристичне рівняння

*r*2 *= a*1*r + a*2. (2)

Якщо рівняння (2) має:

* два різні корені *r*1 та *r*2, то загальний розв’язок рекурентного співвідношення:

*f*(*n*) *= C*1*r*1*n-*1 *+ C*2*r*2*n-*1.

* два однакові корені *r*1 *=r*2, то загальний розв’язок рекурент­ного співвідношення:

*f*(*n*) *= C*1*r*1*n-*1 *+ C*2*nr*1*n-*1 *= r*1*n-*1(*C*1 *+ C*2*n).*

**1**. Розв’язати рекурентні співвідношення:

а) *f*(*n* + 2) = 4*f*(n +1) – 3*f*(*n*).

б) *f*(*n* + 2) = −4*f*(*n*+1) – 4*f*(*n*);

*Розв’язання*

а) Складаємо характеристичне рівняння цього рекурентного спів­відношення *r*2 – 4*r* + 3 = 0 і знаходимо за теоремою Вієта його корені *r*1 = 1, *r*2 = 3.

Оскільки корені різні, то загальний розв’язок рекурентного співвідношення буде *f*(*n*) = *C*1 + *C*23*n*−1.

*Відповідь: f*(*n*) = *C*1 + *C*23*n*−1

б). Складаємо характеристичне рівняння рекурентного співвід­но­шен­ня *r*2 + 4*r* + 4 = 0 і знаходимо за теоремою Вієта його корені *r*1*= r*2 = −2.

Оскільки корені однакові, то загальний розв’язок рекурентного співвідношення буде *f*(*n*) *=* (−2)*n−*1(*C*1 *+ nC*2).

*Відповідь:* *f*(*n*) = (−2)*n−*1 (*C*1 + *nC*2).

***Лінійне рекурентне співвідношення k-го порядку***

*f*(*n + k*) *= a*1*f*(*n + k –* 1) *+ a*2*f*(*n + k –* 2) *+ … + ak f*(*n*)

Характерис­тич­не рівняння: *rk = a*1*rk-*1 *+ a*2*rk-*2 *+ … +ak .*

* Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення *k-*го порядку має *k* різних коренів *r*1*, r*2*, … , rk*, то загальний розв’язок рекурентного співвідношення матиме вигляд:

*f*(*n*) *= C*1*r*1*n-*1 *+ C*2*r*2*n-*1 *+ … + Ckrkn-*1*.*

* Якщо *r*1 є коренем кратності *k* характеристичного рівняння,, то загальний розв’язок рекурентного співвідношення матиме вигляд:

*f*(*n*) = *r*1*n−*1(*C*1 *+ C*2*n + C*3*n*2 *+ … + Cknk−*1)

* Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного спів­відношення *k*-го порядку має корінь *r*1 кратності *k*1, корінь *r*2 кратності *k*2, корінь *rp* кратності *kp* (*k*1 *+ k*2 *+ … + kp = k*), то загальний розв’язок рекурентного співвідношення має такий вигляд:

*f*(*n*) *= r*1*n−*1***+*** *r*2*n−*1***+ … +*** *rpn−*1******.

**Приклад**

Знайтизагальний розв’язок рекурентного співвідношення:

*f*(*n* + 4) = 5*f*(*n* + 3) − 6*f*(*n* + 2) − 4*f*(*n* + 1) +8*f*(*n*).

*Розв’язання*

Складаємо характеристичне рівняння рекурентного співвідно­шен­ня *r*4−5*r*3 + 6*r*2 + 4*r* − 8 = 0 і знаходимо його корені. Використовуючи теорему про раціональні корені многочлена, можна помітити, що число 2 є коренем даного рівняння. Знайдемо його кратність за схемою Горнера:

1 −5 6 4 −8

2 1 −3 0 4 0

2 1 −1 −2 0

2 1 1 0

2 1 2 0

Отже, число 2 є коренем кратності 3. Тоді матимемо *r*+1 = 0. Звідси *r* = −1.

Корені рівняння *r*1 *= r*2*= r*3 = 2, *r*4 = −1.

Загальний розв’язок рекурентного співвідношення:

*f*(*n*) = 2*n−*1(*C*1 + *C*2*n* + *C*3*n*2) + *C*4(−1)*n*−1.

*Відповідь :* *f*(*n*) = 2*n*−1(*C*1 + *C*2*n* + *C*3*n*2) + *C*4(−1)*n*−1.